

Probabilidades y Estadística (M)

Clase 12/05/2016. Lema de Borel-Cantelli. Convergencia casi segura.

1. Ponemos un mono a escribir al azar en la computadora. En cada instante de tiempo n , el mono elige una letra al azar entre las 26 del alfabeto y la escribe ¿Cuál es la probabilidad de que el mono haya escrito BANANA al menos una vez? ¿Cuál es la probabilidad de que el mono haya escrito BANANA infinitas veces?
2. Sea $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d., cada una con densidad dada por

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbf{1}_{(\theta, \infty)}(x).$$

Sea $X_n^{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$. Probar que $X_n^{(1)} \xrightarrow{cs} \theta$.

3. Sea X una v.a. tal que $X \sim U[0, 1]$. Para cada $n \geq 1$, definimos

$$X_n = \begin{cases} 1 & X < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

Probar que $X_n \xrightarrow{cs} 0$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|X_n| > \varepsilon\} = \infty$. ¿Contradice esto el lema de Borel-Cantelli?